

Nejdříve jsme učinili následující pozorování: necht' $\{f_n\} \subset C([a, b])$ a necht' $f_n \rightrightarrows f$, potom $(R) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (R) \int_a^b f_n$.

Věta 1 (stejněměrná konvergence derivací). *Necht' $\{f_n\}$ je posloupnost reálných funkcí definovaných na omezeném intervalu (a, b) a necht' platí*

- $f'_n(x)$ existuje vlastní pro všechna $x \in (a, b)$ a $n \in \mathbb{N}$,
- posloupnost $\{f'_n\}$ konverguje stejnoměrně (k nějaké funkci f),
- existuje $x_0 \in (a, b)$, že posloupnost $\{f_n(x_0)\}$ konverguje.

Potom existuje $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, která má vlastní derivaci na (a, b) a platí $f_n \rightrightarrows F$ a $F' = f$ na (a, b) .

Jako důsledek jsme dostali následující: necht' $\{f_n\} \subset \mathcal{N}([a, b])$ a necht' $f_n \rightrightarrows f$. Potom $(N) \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (N) \int_a^b f_n$.

Poznámky a příklady. 1. Předchozí větu můžeme rovněž zformulovat v řeči řad funkcí, případně primitivních funkcí.

Věta 2 (Dini). *Necht' $\{f_n\} \subset C([a, b])$, $f \in C([a, b])$ a necht' dále platí*

- $f_n \rightarrow f$ an $[a, b]$,
- $\{f_n\}$ je monotónní na $[a, b]$.

Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.

Kombinací těchto vět jsme spočítali $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!}$.